ECOLE NATIONALE DES ING. DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES DE STRASBOURG
(Commune aux 2 options) MATHEMATIQUES APPLIQUEES (1 h) 1984

Sauf dans les questions (1.A) et (4.) où l'on demande les valeurs exactes les résultats seront donnés à 10^{-5} près.

Soit l'équation du 3ème degré :

(1) $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$

Les valeurs numériques des coefficients a et b sont précisées au début de chaque question.

1. a = 5,45 b = -4,84

A. Dresser le tableau des variations de la fonction :

$P(x) = x^3 + 5,45x^2 - 4,84x + 1$

En déduire que l'équation (1) admet deux racines réelles. L'une x_1, négative, est une racine simple, l'autre x_2, positive, est une racine double. Donner les valeurs exactes de x_1 et x_2.

B. Calculer l'intégrale définie :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^3 + 5,45x^2 - 4,84x + 1}\ dx$$

2. a = -1 b = 3

Montrer que l'équation (1) admet une seule racine réelle et la calculer. Le procédé est laissé au choix des candidats. A titre d'exemple, on peut opérer par itération en admettant que x_1 est la limite de la suite :

$$u_{n+1} = 1 - \frac{4}{3+u_n^2} \qquad (\text{avec } u_0 = 0)$$

3. a = 3 b = -9

Montrer que l'équation (1) admet trois racines distinctes x_1, x_2, x_3. Encadrer chacune par deux entiers consécutifs puis les calculer.

Méthode

Poser $x = -4\cos\theta - 1$, θ exprimé en radians étant compris entre 0 et π. Montrer que ce changement d'inconnue est légitime et qu'il permet de calculer $\cos 3\theta$. En déduire les trois valeurs possibles de θ et enfin les valeurs de x_1, x_2, x_3.

4. a = -3,430 b = 1,925

On donne les renseignements suivants : l'équation (1) admet trois racines réelles x_1, x_2, x_3, la plus grande x_3 étant double de la racine intermédiaire x_2.

Grâce à ces renseignements former une équation du second degré dont x_2 soit solution. Calculer x_2 puis x_3 et x_1 (valeurs exactes).
